米田埋め込みと米田の補題

久木田水生

Cate 研 2011 年 10 月 20 日

米田埋め込みとは，任意の局所小圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{C}$ 上の前層 presheaf（$\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ から $\mathbf{Set}$ への関手圏）に埋め込む関手である．本稿では関手のいくつかの性質の定義を導入し，米田埋め込みを定義する．そしてそれが実際に埋め込みになっていることを確認する．米田埋め込みとは直接関係はないが，第 1 節では圏同値の二つの定義を紹介し，それらの定義が等しいことを確認する．

1 関手の性質と圏同値

Definition 1.1 (単射的，全射的)**.** 関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**対象に対して単射的** *injective on objects* であるのは任意の $A, B \in \mathbf{C}_0$ に対して $FA = FB$ ならば $A = B$ であるときである．F が**対象に対して全射的である** *surjective on objects* のは任意の $A \in \mathbf{D}_0$ に対してある $B \in \mathbf{C}_0$ が存在して $FB = A$ が成り立つときである．**射に対して単射的（全射的）** *injective (surjective) on arrows* という概念も同様に定義される．また F が**対象に対して実質的に全射的** *essentially surjective on objects* であるのは，任意の $A \in \mathbf{D}_0$ に対してある $B \in \mathbf{C}_0$ が存在して $FB \simeq A$ が成り立つときである．

単射的，全射的の概念は大きな圏に対しても適用される．小さな圏の間での対象（射）に対して単射的（全射的）関手は，対象部分（射部分）について単射（全射）である．

Definition 1.2 (忠実，十全)**.** ある関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**忠実** *faithful* であるのは，任意の $A, B \in \mathbf{C}_0, f, g : A \to B$ に対して $Ff = Fg$ ならば $f = g$ であるときである．

ある関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**十全** *full* であるのは，任意の $A, B \in \mathbf{C}_0, f : FA \to FB$ に対してある $g : A \to B$ が存在して $Fg = f$ であるときである．

$\mathbf{C}, \mathbf{D}$ が局所小圏であるとき $F_{A,B}$ によって次のように定義される，$\mathbf{C}(A, B)$ から $\mathbf{D}(FA, FB)$ への関数を表す：

$$F_{A,B}(f) = Ff \quad (f \in \mathbf{C}(A, B))$$

この記法を使うと，局所小である $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ に関しては F が忠実（十全）であることは任意の $A, B \in \mathbf{C}_0$ に対して $F_{A,B}$ が単射（全射）であることに等しい．

Example 1.3. (1) $\mathbf{Mon}$ から $\mathbf{Set}$ への忘却関手は忠実であるが十全ではない．

(2) $\mathbf{PPos}$ は前順序集合の圏とする．任意の前順序集合 $(P, \prec)$ に対して $\simeq_P \subseteq P \times P$ を $a \simeq_P b \iff a \prec b \vee b \prec a$ として定義する．このとき明らかに $\simeq$ は同値関係．$\mathbf{PPos}$ から $\mathbf{Poset}$ への関手 F を次のように定義する：

$FP = P/\simeq_P$,

$F(f : P \to Q) = f/\simeq_P$.

このとき F は十全だが忠実ではない．

(3) $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ から $\mathbf{D}$ への投射関手は忠実かつ十全である．

忠実（十全）であることと射に対して単射的（全射的）であることの違いに注意．例えば上の例の (3) は忠実であるが，射に対して単射的ではない．また例えば $\mathbf{C}$ を

$$A \xrightarrow{f} B \qquad C \xrightarrow{g} D$$

という圏とし，$\mathbf{D}$ を

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

という圏とする．関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を

$$FA = FC = X, FB = FD = Y, Ff = \alpha, Fg = \beta$$

と定義すると，F は射に対して全射的であるが，十全ではない．

Exercise 1.4. **Set** から **Mon** への自由生成関手は忠実性，十全性を満たすか？

Definition 1.5 (圏同値)**.** 圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ と関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が**圏同値** *equivalence of categories* を構成するのは，自然同型 $\eta : id_{\mathbf{C}} \to G \circ F$ と $\epsilon : id_{\mathbf{D}} \to F \circ G$ が存在するときである．

圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ がある関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ とともに圏同値を構成するとき，$\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ は**（圏として）同値** *equivalent as categories* であるといい，

$$\mathbf{C} \sim \mathbf{D}$$

と書く．

Exercise 1.6. $\sim$ が反射性，対称性，推移性を満たすことを示せ．

圏同値には次の命題によって示される同値な定義がある．

Proposition 1.7. $\mathbf{C}, \mathbf{D}, F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が圏同値を構成する $\iff$ $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ は忠実かつ十全で，対象に対して実質的に全射的である．

Proof. $\Rightarrow$ を示す．$\mathbf{C}, \mathbf{D}, F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が圏同値を構成するとする．このとき自然同型 $\eta : id_{\mathbf{C}} \to G \circ F$ と $\epsilon : id_{\mathbf{D}} \to F \circ G$ が存在する．まず F が忠実であることを示す．$A, B \in \mathbf{C}_0,\ f, g : A \to B,\ Ff = Fg$ とする．このとき $GFf = GFg$．η の自然性より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & GFA \arrow[d, "GFf"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & GFB \end{tikzcd}$$

が可換．よって $GFf \circ \eta_A = \eta_B \circ f$．同様に $GFg \circ \eta_A = \eta_B \circ g$．$GFf = GFg$ より $\eta_B \circ f = \eta_B \circ g$．$\eta_A$ は同型射だから $f = g$．よって F は忠実である．G が忠実であることも同様に示される．

次に F が十全であることを示す．$f : FA \to FB$ を考える．η の自然性より任意の $C \in \mathbf{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\eta_C"'] & GFC \arrow[d, "GF\eta_C"] \\ GFC \arrow[r, "\eta_{GFC}"'] & GFGFC \end{tikzcd}$$

が可換．η は自然同型だから

$$\eta_{GFC}^{-1} \circ GF\eta_C = \eta_C \circ \eta_C^{-1} = id_{GFC} \tag{1}$$

再び η の自然性より

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "\eta_{GFA}"] \arrow[d, "Gf"'] & GFGFA \arrow[d, "GFGf"] \\ GFB \arrow[r, "\eta_{GFB}"'] & GFGFB \end{tikzcd}$$

が可換．η は自然同型だから

$$GFGf = \eta_{GFB} \circ Gf \circ \eta_{GFA}^{-1} \tag{2}$$

以上より

$$\begin{aligned} Gf \circ \eta_{GFA}^{-1} \circ GF\eta_A &= \eta_{GFB}^{-1} \circ GF\eta_B \circ Gf \quad \text{(1) より} \\ \eta_{GFB} \circ Gf \circ \eta_{GFA}^{-1} \circ GF\eta_A &= GF\eta_B \circ Gf \\ GFGf \circ GF\eta_A &= GF\eta_B \circ Gf \quad \text{(2) より} \\ GF\eta_B^{-1} \circ GFGf \circ GF\eta_A &= GF\eta_B^{-1} \circ GF\eta_B \circ Gf \\ GF(\eta_B^{-1} \circ Gf \circ \eta_A) &= GF(\eta_B^{-1} \circ \eta_B) \circ Gf \\ &= GF(id_B) \circ Gf \\ &= id_{GFB} \circ Gf \\ &= Gf \end{aligned}$$

G は忠実だから

$$F(\eta_B^{-1} \circ Gf \circ \eta_A) = f$$

$\eta_B^{-1} \circ Gf \circ \eta_A : A \to B$ だから F が十全であることが示された．

最後に F が対象に対して実質的に全射的であることは $\epsilon : id_{\mathbf{D}} \to FG$ が自然同型であることから直ちに帰結する．

$\Leftarrow$ を示す．$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ は忠実，十全かつ対象に対して実質的に全射的だとする．関手 $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ を次のように定義する．対象について．$A \in \mathbf{D}_0$ に対してある $B \in \mathbf{C}_0$ が存在して $FB \simeq A$ である．このような B を各 A に対して一つ選んでおき，それを GA の値とする．また A から FGA への同型射を ϵ_A としておく．射について．$A, B \in \mathbf{D}_0, f : A \to B$ とする．F の忠実性と十全性から，$\epsilon_B \circ f \circ \epsilon_A^{-1} : FGA \to FGB$ に対して一意的な $g : GA \to GB$ が存在して，$Gg = \epsilon_B \circ f \circ \epsilon_A^{-1}$ が成り立つ．各 f に対して，この g を Gf の値とする．G が実際に関手になることを示そう．$G(dom(f)) = dom(Gf), G(cod(f)) = cod(Gf)$ は自明．$FGid_A = \epsilon_A \circ id_A \circ \epsilon_A^{-1} = id_{FGA} = Fid_{GA}$．$F$ の忠実性より $Gid_A = id_{GA}$．よって G は恒等射を保つ．$f : A \to B, g : B \to C$ を考える．$FG(g \circ f) = \epsilon_C \circ g \circ f \circ \epsilon_A^{-1} = \epsilon_C \circ g \circ \epsilon_B^{-1} \circ \epsilon_B \circ f \circ \epsilon_A^{-1} = FGg \circ FGf = F(Gg \circ Gf)$．$F$ は忠実だから $G(g \circ f) = Gg \circ Gf$．よって G は合成を保つ．以上より G が関手であることが示された．

次に自然同型 $\eta : id_C \to G \circ F, \epsilon : id_D \to F \circ G$ を定義する．ϵ に関しては上で各 $A \in \mathbf{D}_0$ に対して定めておいた ϵ_A を構成要素として持つものとする．これが自然であることは G の定義より明らかである．η に関して．F の十全性より $\epsilon_{FA} : FA \to FGFA$ に対してある $f : A \to GFA$ が存在して $Ff = \epsilon_{FA}$．このような f を各 A に対して選んでおき，それを η_A として定める．このとき $F\eta_A = \epsilon_{FA}$．η が実際に自然であることは次のように示される．$f : A \to B \in \mathbf{C}_1$ を考える．$F\eta_A = \epsilon_{FA}, F\eta_B = \epsilon_{FB}$ であり，ϵ は自然であるから

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & FGFA \arrow[d, "FGFf"] \\ FB \arrow[r, "F\eta_B"'] & FGFB \end{tikzcd}$$

が可換．よって F の忠実性より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & GFA \arrow[d, "GFf"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & GFB \end{tikzcd}$$

が可換．よって η は自然変換.

最後に各 η_A が同型射であることを示そう．F の十全性より $\epsilon_{FA}^{-1} : FGFA \to FA$ に対してある $f : GFA \to A$ が存在して $Ff = \epsilon_{FA}^{-1}$．よって

$$\begin{aligned} F(f \circ \eta_A) &= Ff \circ F\eta_A \\ &= \epsilon_{FA}^{-1} \circ \epsilon_{FA} \\ &= id_{FA} \\ &= Fid_A \end{aligned}$$

F の忠実性より $f \circ \eta_A = id_A$．$\eta_A \circ f = id_{GFA}$ も同様に示される．従って η_A は同型射. □

Definition 1.8 (埋め込み). 関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**埋め込み** *embedding* であるのは，F が忠実，十全，かつ対象に対して単射的であるときである．

$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が埋め込みであるとき，$F[\mathbf{C}]$ は $\mathbf{D}$ の十全な部分圏である．

2 米田埋め込み

Definition 2.1 (前層). 任意の圏 $\mathbf{C}$ に対して $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ から $\mathbf{Set}$ への関手からなる関手圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ を $\mathbf{C}$ 上の**前層** *presheaf* と呼ぶ.

米田埋め込みは任意の局所小圏 $\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ への埋め込み関手である．本節では米田埋め込みの定義と米田の補題の証明を行う．

$\mathbf{C}$ は局所小圏とし，$A \in \mathbf{C}_0$ とする．このとき任意の $B \in \mathbf{C}_0$ に対して $\mathbf{C}(A, B)$ は A から B への射の集合として定義される．また $\mathbf{C}$ の任意の射 $f : B \to C$ に対して $\mathbf{C}(A, B)$ から $\mathbf{C}(A, C)$ への関数 $\mathbf{C}(A, f)$ を次のように定義する：

$$\mathbf{C}(A, f)(g) = f \circ g \qquad (g : A \to B).$$

このとき $\mathbf{C}(A, +)$ は $\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}$ への共変関手である．

同様にして反変関手 $\mathbf{C}(-,A):\mathbf{C^{op}}\to\mathbf{Set}$ も定義することが出来る．具体的には任意の $f:B\to C$ に対して $\mathbf{C}(f,A):\mathbf{C}(C,A)\to\mathbf{C}(B,A)$ は次にように定義される関数である：

$$\mathbf{C}(f,A)(g)=g\circ f \qquad (g:C\to A).$$

任意の $A\in\mathbf{C}_0$ に対して，この反変関手 $\mathbf{C}(-,A)$ を yA によって表す．$f:A\to B\in\mathbf{C}_1$ が与えられたとする．このとき任意の $C\in\mathbf{C}_0$ に対して yAC（$=\mathbf{C}(C,A)$）から yBC（$=\mathbf{C}(C,B)$）への関数 yf_C を次のように定義する：

$$yf_C(g)=f\circ g \qquad (g:C\to A).$$

このとき yf は yA から yB への自然変換である．実際任意の $g:C\to D$，$h:D\to A$ に対して

$$\begin{aligned}
yBg\circ yf_D(h) &= yBg(yf_D(h))\\
&= yBg(f\circ h)\\
&= (f\circ h)\circ g\\
&= f\circ(h\circ g)\\
&= yf_C(h\circ g)\\
&= yf_C(yAg(h))\\
&= yf_C\circ yAg(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"'] & yAC \arrow[r, "yf_C"] & yBC \\
D & yAD \arrow[u, "yAg"] \arrow[r, "yf_D"'] & yBD \arrow[u, "yBg"']
\end{tikzcd}$$

このとき y は $\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ への関手である．

Exercise 2.2. (1) $\mathbf{C}(A,-)$，$\mathbf{C}(-,A)$ がそれぞれ関手になっていることを確かめよ．

(2) y が $\mathbf{C}$ から $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ への関手になっていることを確かめよ．

この関手 $y:\mathbf{C}\to\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ に関して以下のことを確かめていく．

(I) 任意の $P:\mathbf{C}\to$ と $A\in\mathbf{C}_0$ に関して $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA,P)$ と PA の間に一対一対応 $\phi_{A,P}$ が存在する．

(II) ϕ は A と P において自然である．すなわちすなわち任意の $f:A\to B\in\mathbf{C}_1$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yB,P) \arrow[r, "\phi_{B,P}"] \arrow[d, "\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yf,P)"'] & eval(P,B) \arrow[d, "eval(P,f)"] \\
\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA,P) \arrow[r, "\phi_{A,P}"'] & eval(P,A)
\end{tikzcd}$$

が可換であり，任意の $\eta:P\to Q\in\mathbf{Set}_1^{\mathbf{C^{op}}}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA,P) \arrow[r, "\phi_{A,P}"] \arrow[d, "\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yf,\eta)"'] & eval(P,A) \arrow[d, "eval(\eta,A)"] \\
\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA,Q) \arrow[r, "\phi_{A,Q}"'] & eval(Q,A)
\end{tikzcd}$$

が可換である．ただし $eval(+,+) : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ は評価関手である．

以上が米田の補題の内容である．最後に米田の補題を使って次を示す．

(III) 関手 $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ は埋め込みである．

(I) について．まず $\phi_{A,P} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}(yA, P) \to PA$ を次のように定義する：任意の $\eta : yA \to P$ に対して

$$\phi_{A,P}(\eta) = \eta_A(id_A)$$

以後，これを $\tilde{\eta}$ によって表す．次に $\psi_{A,P} : PA \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}(yA, P)$ を次のように定義する．$x \in PA$ とする．$B \in \mathbf{C}_0$ に対して，

$$\psi_{A,P}(x)_B(f) = P(f)(x) \qquad (f : B \to A \in \mathbf{C}_1)$$

以後，これを $\overline{x}$ と表す．

$\phi_{A,P}$ が一対一であることを示す．すなわち $\overline{\tilde{\eta}} = \eta$ および $\tilde{\overline{x}} = x$ が成り立つことを示す．任意の $f : B \to A$ に対して η の自然性より

$$\begin{tikzcd} yAA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "yAf"'] & PA \arrow[d, "Pf"] \\ yAB \arrow[r, "\eta_B"'] & PB \end{tikzcd}$$

が可換である．よって $id_A \in yAA$ を考えると

$$\begin{aligned} Pf(\eta_A(id_A)) &= \eta_B(yAf(id_A)) \\ Pf(\tilde{\eta}) &= \eta_B(id_A \circ f) \\ \overline{\tilde{\eta}}_B(f) &= \eta_B(f) \end{aligned}$$

また $\tilde{\overline{x}} = \overline{x}_A(id_A) = P(id_A)(x) = id_{PA}(x) = x$．従って (I) が示された．

(II) について．まず A における自然性を示そう．$f : A \to B$ を考える．このとき $eval(P, f) \circ \phi_{B,P}(\eta) = Pf(\eta_B(id_B))$．また

$$\begin{aligned} \phi_{A,P} \circ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}(yf, P)(\eta) &= \phi_{A,P}(\eta \circ yf) \\ &= (\eta \circ yf)_A(id_A) \\ &= \eta_A \circ yf_A(id_A) \\ &= \eta_A(yf_A(id_A)) \\ &= \eta_A(f \circ id_A) \\ &= \eta_A(f) \end{aligned}$$

η の自然性より

$$\begin{tikzcd} yBB \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "yBf"'] & PB \arrow[d, "Pf"] \\ yBA \arrow[r, "\eta_A"'] & PA \end{tikzcd}$$

が可換である．従って $id_B \in yBB$ を考えれば $Pf(\eta_B(id_B)) = \eta_A(yBf(id_B)) = \eta_A(id_B \circ f) = \eta_A(f)$．よって $\phi_{A,P}$ の A における自然性は示された．

次に P における自然性を示す．$\epsilon : P \to Q \in \mathbf{Set}_1^{\mathbf{C^{op}}}$ を考える．$\eta : yA \to P$ に対して $eval(\epsilon, A) \circ phi_{A,P}(\eta) = \epsilon_A(\eta_A(id_A))$．一方 $\phi_{A,Q} \circ \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA, \epsilon)(\eta) = \phi_{A,Q}(\epsilon \circ \eta) = \epsilon_A \circ \eta_A(id_A) = \epsilon_A(\eta_A(id_A))$．よって P における自然性も示された．

以上から，

Proposition 2.3 (米田の補題)**.** 上で定義された関手 $y : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$ と任意の $P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$，$A \in \mathbf{C}_0$ に対して $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA, P)$ と PA の間には一対一の対応があり，かつ，この対応は A と P において自然である．

最後に次の系を示す．

Corollary 2.4. $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ は埋め込みである．

Proof. y が対象に対して単射的であることは自明である．また任意の $A, B \in \mathbf{C}_0$ に対して米田の補題より $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}(yA, yB)$ と yBA（$= \mathbf{C}(A, B)$）の間には自然な一対一の対応がある． □

参考文献

[1] S. Awodey. *Category Theory.* Oxford University Press, New York, 2006.