数学の哲学
3. 集合論のパラドクス

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

素朴集合論

- カントールによる集合の定義：

  > 私たちは「集合」ということで，確定し互いに区別される私たちの直観あるいは思考の諸対象 m が集められた全体 M を意味する．これらの対象は M の「要素」と呼ばれる．

- 疑問：
  - 「確定し互いに区別される諸対象」とはどのようなものか？
- この問題に対してカントールは明確な答えを与えていない．
- このことが後々問題を引き起こすことになる．
- 以後，単に「対象」と言われる時は「確定し互いに区別される対象」を意味するものとする．

対象についての要請

- 次のことが要請される：

  任意の対象 x, y に対して，$x = y$ および $x \neq y$ の真偽は確定している．

集合の定義の仕方

- **外延的定義**：要素を列挙する．

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

- **内包的定義**：要素が満たすべき条件を述べる．

$$\{x : x \text{ は 10 以下の素数}\}$$

- この二つの集合は同一である（集合の同一性基準については後述）．

包括原理

- C が任意の対象 x について真偽が確定する条件であるとき，C を**確定的条件**と呼ぶことにする．
- たとえば「20 歳未満である」は確定的条件だが,「若い」は確定的条件ではない．
- C が確定的条件であるとき,

$$\{x : C(x)\}$$

  は確定した集合を表す．
- このとき C を A の**定義条件**と呼ぶ．

集合の要素

- 対象 a が集合 A の要素であることを $a \in A$ によって表す．また a が A の要素でないことを $a \notin A$ によって表す.
- 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して

$$x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \iff \exists i.(1 \leq i \leq n) \& x = x_i$$

- 任意の確定的条件 C に対して

$$a \in \{x : C(x)\} \iff C(a)$$

部分集合，集合の同一性

- 集合 A が集合 B の**部分集合**であるのは，A のすべての要素が B の要素であるときである
- A が B の部分集合であることを

$$A \subseteq B \text{ あるいは } A \subset B$$

によって表す．

- 集合 A と集合 B が**同一**であるのは，$A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ が成り立つときである．
- A と B が同一であることを

$$A = B$$

によって表す．

集合は集合の要素になりうるか？

- カントールによれば集合の要素は「明確に規定され互いに区別される私たちの直観あるいは思考の諸対象」である.
- ではこの基準に照らして，ある集合が何らかの集合の要素になるということは可能だろうか？

集合は集合の要素になりうるか？

- カントールは可能だと考える.
- 集合は要素の列挙によって，あるいは確定的条件によって十分明確に規定されている.
- また集合同士の同一性も上記の基準によって明確に与えられている.
- 二つの集合が同一であるかそうでないかは客観的に確定している.
- 従って二つの異なる集合は互いに区別される.
- 従って集合もまた確定し互いに区別される対象である.
- 従って集合も集合の要素になることが出来る.
- 例えば任意の集合 A に対して $\{A\}$ は A を要素として含む集合である.

Lemma

任意の集合 A に対して $x \in A$ は確定的条件である.

Proof. 集合 A が外延的に定義されているとする．任意の対象 x が A の要素かどうかは確定的である．例えば A が $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ として定義されているならばある x_i について $x = x_i$ が成り立てば $x \in A$ であるし，そうでなければ $x \notin A$ である．一方，集合の要素は確定した区別できる対象であるため任意 x_i に対して $x = x_i$ は確定的条件である.
集合 A が内包的に定義されているとする．また C は A の定義条件であるとする．このとき

$$x \in A \iff C(x)$$

であり，C は確定的だから $x \in A$ も確定的. □

Corollary

$x \in x$ という条件は確定的である．

Proof. 集合 A を考える．上の補題より $x \in A$ は確定的条件である．従って $A \in A$ の真偽は確定的である．従って $x \in x$ は確定的条件である． □

集合はそれ自身を要素として持ちうるか？

- では $A \in A$ を満たすような集合 A はありうるだろうか？
- ある対象 a について，次の条件を考えよう：

$$x = a \ \vee a \in x$$

- $x = a$ も $a \in x$ もともに確定的条件だから，この条件は確定的である．
- 従って $\{x : x = a \vee a \in x\}$ は集合である．この集合を A とする．
- $a = a$ より $a = a \vee a \in a$．従って $a \in A$.
- 従って $A = a \vee a \in A$．従って $A \in A$.

Proposition

自分自身を要素として含む集合が存在する.

ラッセル集合

- $x \in x$ という条件を考えよう.
- 上の系よりこれは確定的である．従って $x \notin x$ もまた確定的条件である.
- 従って $\{x : x \notin x\}$ は集合を定義する．この集合を R とする.
- この集合は**ラッセル集合**と呼ばれている.

Theorem

$R \in R$ かつ $R \notin R$

Proof. $R \in R$ と仮定する．$R = \{x : x \notin x\}$ だから，R の定義条件より $R \notin R$．これは仮定と矛盾する．従って $R \in R$ は誤り．従って $R \notin R$．しかしこのとき R は R の定義条件を満たしているので $R \in R$ が帰結する． $\square$

素朴集合論の破綻

- 上の定理により，素朴集合論からは矛盾が導かれることが分かった．
- 通常の論理学では，矛盾からは任意の命題が導ける．
- 従って素朴な集合論はあらゆる命題の導出を可能にしてしまう．
- これでは数学の基礎としては何の役にも立たない．

問題の分析

素朴集合論における上記の問題の原因は以下のことに求められる.

- すべての集合 A とすべての対象 x に対して $x \in A$ が確定的である（つまり $x \in A$ か $x \notin A$ のどちらかに決まっている）という想定.
- $A \in A$ や $A \notin A$ ということが可能だという想定.
- 矛盾からはあらゆることが導けるという原理.