数学の哲学
10. 数学における公理、定理、証明の役割

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

言明の意味に対する2つの伝統的なアプローチ

- **指示的意味論**
  - 文「a は P だ」が真であるのは，a が P であるとき.
- **検証主義的意味論**
  - 文「a は P だ」が真であるのは，それが正当な手続きで確かめられるとき.

数学的言明に応用した際の問題点：

- 指示的意味論は語の指示対象が何か，それらに対する指示や認識的アクセスがいかにして可能かを説明する必要がある.
- 検証主義的意味論は，数学的言明がそもそも何についての言明なのかを説明する必要がある.

指示的意味論

タルスキ以来，言語哲学，数学の哲学において支配的な意味論.

語の意味を次のように説明する：

- 名詞の意味はそれが指示する対象.
- 述語の意味はそれが表す関係.
- 文の意味は真理条件.

たとえば $x > y$ が真であるのは，x によって指示される対象が，y によって指示される対象に対し，$>$ によって表される関係を持つときである.

指示性の想定

数学の哲学の伝統的な議論においては次の二つのことが前提されるのが一般的である（Cf. Benacerraf, “Mathematical truth”）.

(1) 言語のある部分に対して私たちは指示的な意味論を持っている.

(2) 数学の言語は言語の他の部分と等質的な意味論を持つべきである.

ここから多くの論者は数学の言語に対して，指示的意味論が適切だと結論している.

しかし (1)(2) を認めても，そこから数学の言語が，言語の指示的な断片と等質的であるということは必ずしも帰結しない.

非指示的な言明

私たちの言語には指示的な意味論が適切でない部分もある．

- 遂行文
- 規則，命令
- Etc.

文法的な形式の同一性が同じ意味論を要求するとは限らない．

- 「私はあなたに出資することを検討する」
- 「私はあなたに出資することを約束する」

これらは同じ文法形式を持つが，全く異なる方法で評価される．

非指示的な言明

「私はあなたに出資することを検討する」
$\Longrightarrow$ この発話をした人物がその発話が向けられた人物に出資することを検討するときに真.

「私はあなたに出資することを約束する」
$\Longrightarrow$ 常に真. この文の発話それ自身が約束するという行為になるから.

後者の言明の真理にとって,「私」や「あなた」の指示対象や,「出資する」の意味は無関係.

従ってこれは指示的意味論で解釈されない.

公理や定義の真理

数学における公理や定義：それを要請するという行為によって真になるものであり，発話外の何者もその真理には無関係.

$\Longrightarrow$ 指示的意味論で解釈するのは適当ではない

ダメットの検証主義

Dummett “The philosophical basis of intuitionistic logic”

- 言明の意味は真理条件ではなく検証条件.
- 言明の意味はその使用を決定し，またその使用によって余すところなく決定される.
- 言明の意味を理解する ＝ その適切な使用法を理解する
  ＝ 発話の条件と発話の帰結を理解する

発話の条件の理解	どのような場合にその発話をするのが適切であるかの理解 （論理学でいえば導入則の理解）
発話の帰結の理解	その発話を聞いた時に適切な反応が出来ること その発話をした時に何にコミットすることになるのかを理解すること （論理学でいえば除去則の理解）

意味理論の中心概念

言明の持つ様々な特徴：
真である，主張可能である，原理的に確かめられる，等々.

意味理論を構築する際にはこれらのどれかを中心概念として選び，それを用いて言明の意味を説明しなければならない.（Dummett, *ibid.*）

意味理論の中心概念

真理を中心概念として選ぶことの問題は，言明の真理が一般的には実効的に決定可能ではないことである．

言明 S の真理が実効的に決定可能ではない

$\Longrightarrow$ S が成り立っているときに，常にそうと認識できるとは限らない

$\Longrightarrow$ S を使用するのに適切な状況を理解していない

$\Longrightarrow$ 意味使用のテーゼに抵触

よって意味理論の中心概念として真理は不適切

意味理論の中心概念

Dummett は真理の概念を**検証可能性**に置き換えることを提案.

数学における検証は証明 $\Longrightarrow$ 数学的言明の意味理論にとっての中心概念は証明可能性であるということになる.

真理を証明可能性に置き換えても，実効的に決定可能な述語 F に関しては T 図式

$$\text{“Fa” が真} \iff Fa$$

が成り立つ.

検証主義の問題点

証明可能性に基づく意味の理論は，公理や定義の意味を説明しない．

というのも公理や定義は証明されるものではなく，端的に要請される，真と見なされるものだからである．

よって検証主義は数学の意味理論としては不十分

問題解決へのアプローチ

意味使用のテーゼをより徹底しよう.

ダメットの説明は定理（証明される命題）として述べられている言明のみを対象にしている.

しかし言明は文脈に応じて異なる様々な使用を持つ.

そこで実際に数学において公理がどのように使用されているのか，公理がどのような役割を持つのかを考察することでこの問題にアプローチしよう.

2種類の公理

- 数学の基礎的な概念について「自明に」成り立つ（と思われる）真理を主張する公理．集合論や数論の公理など．
- ある種の数学的構造を定義する公理．抽象代数やトポロジーの公理など．

Feferman は前者を**基礎的公理**，後者を**構造的公理**と呼ぶ．

Hellman は前者を**主張的公理**，後者を**定義的公理**と呼ぶ．

基礎的／主張的公理

妥当な推論，数，集合，関数など，すべての数学的概念の基礎となる概念についての「自明な真理」を述べる公理．

これらは数学において真であると受け入れられてきた理論を公理体系として厳密に形式化するために立てられる．

集合や数については私たちは十分な直観的理解を持っている．基礎的公理はそのような直観的な理解に依存して真理を持つ．

構造的／定義的公理

特定の代数構造を定義するために立てられる公理.

既知の理論を形式化するためではなく，既知の理論のある部分を抽象してより一般的な数学的構造を特徴づけるため立てられる．例：抽象代数，トポロジー.

あるいは既存の体系の特定の性質を修正して新しい数学的構造を得るために立てられる．例：非ユークリッド幾何学，超集合論.

言明の force

構造的／定義的公理は明らかに陳述的に使われていない．

構造的／定義的公理はある新しい数学的構造（概念）を導入し，その構造（概念）に名前を付けて，後にその名前によってその構造（概念）を参照するために要請される．

従って構造的／定義的公理は基礎的／主張的公理とは異なる *force* を持つ言明である．

言明の force

ダメットは言明に関して**意義** *sense*，**力** *force*，**重要性** *significance* を区別する．

言明の force

ダメットは言明に関して**意義** *sense*，**力** *force*，**重要性** *significance* を区別する．

- 意義：真理条件，検証条件などによって定まる．フレーゲの Sinn.
- 力：その言明がどの法 mood で発話されているか．フレーゲの Kraft.
- 重要性：説明なし．おそらくその言明が及ぼす効果のようなものか？

異なる力を持つ言明の重要性を理解するためには異なる概念を中心に据えなければならない．

例えばダメットは，命令文の重要性を理解するためにはその**服従条件** *obedience condition* の理理解が必要であるという．

オシツオサレツ法

Millikan, "Pushmi-pullyu representations" はある状況を描写しつつ，ある状況を成立させるよう聞き手に指令を与えるような言明の使用を**オシツオサレツ法** *pushmi-pullyu mood* と呼んでいる．

構造的／定義的公理はある数学的構造の性質を描写しつつ，聞き手（読者）に対しては，証明を行う枠組みを提供する．

構造的／定義的公理は陳述文ではない．
それはオシツオサレツ法に近い力を持つ．

Feferman による構造的公理の説明

構造的公理は

- ある種の数学的構造を定義し,
- その公理から導かれる帰結（についての私たちの知識を簡潔にパッケージして,
- その公理を満たす任意の構造に効率よく伝達する

という役割を持つ.

Cf. Feferman, “Does mathematics need a new axiom?”

$$\begin{tikzcd}
\text{Group axioms} \arrow[d, "\text{entail}"'] & \text{Integers} \arrow[l, "\text{satisfy}"'] \arrow[d, dotted, "\text{entail}"] \\
\text{Inverses are unique} \arrow[r, "\text{communicate}"'] & \text{-x are unique}
\end{tikzcd}$$

数学の定理を関数と見なす BHK 解釈に則して考えると，具体的な数学的構造（モデル）は関数に対する入力で，公理系を介して知られるその構造についての性質は関数の出力だと見なすことが出来る．

基礎的／主張的公理

- 数学において伝統的に真であると見なされてきたことを形式的に体系化する.
- 対象理論が持つ（と見なされる）のと同様の真理を持つ.
- 対象理論との整合性によって検証または反証される.
- 対象理論と独立の公理が受け入れられるかどうかは，哲学的議論家数学者共同体の社会的決定に依存して決定される.
- Cf. Easwaran, "The role of axioms in mathematics" and Russell, "The regressive method of discovering the premises of mathematics."

構造的／定義的公理

- 抽象的な数学的構造を定義する．
- それの持つ性質を研究することで，その公理を満たす数学的構造一般に対して情報を伝達する．
- 公理はその構造について成り立つ性質をコンパクトにパッケージしてある．
- 定理はそこにパッケージされた情報を表す．
- 定理の導出に使われた証明が直観主義的なものであれば，証明は公理（パッケージ）から定理（情報）を取り出すための実効的な手続きを表している．
- Cf. Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*.

ダメット再訪

言明の意味の理解＝その言明を発話するのが適切な状況の理解，およびその言明の発話の帰結の理解.

- 公理（または公理系，以下同様）の発話が適切な状況：発話者がその公理によって取り扱いたいと意図している数学的構造のクラスに，実際にその公理（系）が当てはまる状況.
- 公理の発話の帰結：その公理を充足する任意の数学的構に対して，その公理から導出される定理が適用できるということ.

これらを理解している言語使用者は，公理を立て，証明をすることによってその公理を充足する構造についての情報を，効率よく手にすることが出来る.

まとめ

- ダメットの検証主義は，数学的言明の意味をその証明可能性に求めるが，しかしそれだけでは数学の公理の意味を説明できない．
- 公理には基礎的／主張的公理と構造的／定義的公理がある．
- 基礎的／主張的公理は従来受け入れられている理論との整合性によって検証あるいは反証される．
- 構造的／定義的公理は陳述的なものではなく，ミリカンがオシツオサレツ法と呼ぶものと類比的な力を持つ．
- それはある構造を定義し，その構造についての研究を促し，効率よくそれらの構造についての情報を伝達する役割を持つ．