数学の哲学
8. 無限を比較する

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

デデキント無限

- 既にみたように，ガリレオは部分と全体が等しくなるということから無限の要素を持つ集合を矛盾的なものと考えた．
- デデキントはこの性質を利用し，無限集合を特徴づけた．
- 具体的にいうと彼は，集合 A が無限集合であるのは A のある真部分集合 B に対して，A から B への単射が存在するときである，と定義した．
- このような性質を持つ無限集合は今日では**デデキント無限**と呼ばれている．
- B から A へは埋め込みが存在し，それは単射であるので，カントール＝ベルンシュタインの定理より $|A| = |B|$ となる．
- 従ってデデキント無限である集合は，それと基数の等しい真部分集合を持つことが分かる．

自然数と平方数

- $\mathbf{N}$ を自然数の集合，$\mathbf{S}$ を自然数の平方数の集合とする．
- このとき $f(x) = x^2$ によって定義される関数 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{S}$ は $\mathbf{N}$ から $\mathbf{S}$ への単射である．
- $\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{N}$ なので $\mathbf{N}$ はデデキント無限である．
- また $\mathbf{N} \sim \mathbf{S}$ である．

自然数と整数

- $\mathbf{Z}$ を整数の集合とする.
- このとき $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{N}$ への単射が定義できるだろうか？

自然数と整数

- $\mathbf{Z}$ を整数の集合とする.
- このとき $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{N}$ への単射が定義できるだろうか？
- ひとつの例は次の関数 f である：

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$$

- $\mathbf{N}$ から $\mathbf{Z}$ に単射があることは自明なので $\mathbf{N} \sim \mathbf{S}$.

自然数と有理数

- $\mathbf{Q}$ を有理数の集合とする.
- このとき $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{N}$ への単射が定義できるだろうか？

自然数と有理数

- $\mathbf{Q}$ を有理数の集合とする.
- このとき $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{N}$ への単射が定義できるだろうか？
- この問題は $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への単射が定義できるかと言い換えても良い.
- なぜならば有理数は二つの整数の組で表わすことができ，整数は自然数と一対一に対応づけることが出来るからである.

自然数と有理数

- $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を次のように定義しよう：

$$f(m, n) = 2^m 3^n$$

- 素因数分解の一意性より $2^m 3^n = 2^{m'} 2^{n'}$ から $m = m', n = n'$ が帰結する.
- 従って f は単射である.
- 一方で $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ を

$$g(n) = (n, n)$$

  と定義すれば g はもちろん単射である.
- よって $\mathbf{N} \sim \mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{Q}$ である.

自然数と自然数の有限列

- 任意の集合 A について A^n を次のように定義する：

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{n+1} &= A^n \times A \end{aligned}$$

- 上では $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}^2$ を示した.
- そこから直ちに次の結果が得られる

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{N}^2 \sim \mathbf{N}^3 \sim \cdots \sim \mathbf{N}^n \sim \ldots$$

- 言い換えると，自然数と一定の長さの自然数の有限列の間には一対一の対応が付けられる.

自然数と自然数の有限列

- 自然数と任意の長さの自然数の有限列はどうだろうか？ つまり

$$\mathbf{N} \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}^n$$

は成り立つか？

自然数と自然数の有限列

- 任意の $(n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \mathbf{N}^i$ に対して
$$f(n_1, n_2, \ldots, n_i) = p_1^{n_1+1} p_2^{n_2+1} \ldots p_i^{n_i+1}$$
とする．ただし p_k $(1 \leq k \leq i)$ は k 番目の素数とする．
- このとき素因数分解の一意性より，
$f(n_1, n_2, \ldots, n_i) = f(m_1, m_2, \ldots, m_j)$ となるのは $i = j$，かつ各 $1 \leq k \leq i$ に対して $n_k = m_k$ となるときであり，そしてそのときに限る．従って f は単射である．
- 逆向きの単射が存在することは自明なので
$$\mathbf{N} \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}^n$$
が成り立つ．

自然数と自然数の有限部分集合

- 任意の集合 A に対して $\mathscr{P}_{fin}(A)$ は A の有限部分集合からなる集合であるとする.
- 明らかに

$$|\mathbf{N}| \leq |\mathscr{P}_{fin}(\mathbf{N})| \leq |\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}^n|$$

である.

- 従って

$$\mathbf{N} \sim \mathscr{P}_{fin}(\mathbf{N})$$

自然数と無限の数列

- 自然数と無限の要素からなる数列の間には一対一対応が成り立つだろうか？
- まずは 0 と 1 だけからなる数列について考えよう.
- この集合を $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ と表す.
- $\mathbf{N} \sim \mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ は成り立つか？

Theorem

$|\mathbf{N}| \lneq |\mathbf{2^N}|$

Proof. 背理法による．$\mathbf{N} \sim \mathbf{2^N}$ と仮定する．このとき $\mathbf{N}$ から $\mathbf{2^N}$ への全単射 f が存在する．ここで次のように数列 $\{d_n\}$ を定義しよう：

$$d_i = |f(i)_i - 1|$$

ただし $f(i)_i$ は数列 $f(i)$ の i 番目の要素を表す．このとき $\{d_n\}$ は 0 と 1 からなる数列であり，従って $\mathbf{2^N}$ の要素である．f は全射であるから，ある $i \in \mathbf{N}$ に対して $f(i) = \{d_n\}$ である．一方で $d_i = |f(i)_i - 1| \neq f(i)_i$ だから $f(i) \neq \{d_n\}$．これは矛盾である．従って $\mathbf{N} \not\sim \mathbf{2^N}$．$\mathbf{N}$ から $\mathbf{2^N}$ への単射は容易に作れる．よって $|\mathbf{N}| \lneq |\mathbf{2^N}|$. □

Corollary

$\mathbf{R}$ を実数の集合とすると，$|\mathbf{N}| \lneq |\mathbf{R}|$.

Proof. 以下はインフォーマルな説明．実数は小数点以下無限に続く数列と同一視することが出来る．従って $\mathbf{R} \sim \mathbf{2}^{\mathbf{N}}$．よって上の定理より $|\mathbf{N}| \lneq |\mathbf{R}|$. □

任意の集合とそのべき集合

- $\mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ は $\mathbf{N}$ のべき集合（$\mathbf{N}$ の部分集合の集合）$\mathscr{P}(\mathbf{N})$ と等数的である. このことを示そう.
- $f : \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$ を次のように定義する：

$$f(\{a_n\}) = \{i \in \mathbf{N} : a_i = 1\}$$

- f が全単射であることは容易に示される.
- 従って $\mathbf{2}^{\mathbf{N}} \sim \mathscr{P}(\mathbf{N})$.
- ここから $|\mathbf{N}| \lneq |\mathscr{P}(\mathbf{N})|$ が分かる.
- さらに任意の集合 A に対して $|A| \lneq |\mathscr{P}(A)|$ であることも示すことが出来る.

カントールの定理

Theorem

任意の集合 A に対して，$|A| \lneq |\mathscr{P}(A)|$.

Proof. 背理法による．$A \sim \mathscr{P}(A)$ とする．このとき $\mathscr{P}(A)$ から A への全単射 f が存在する．$D = \{a \in A : a \notin f^{-1}(a)\}$ とする．このとき $D \subseteq \mathscr{P}(A)$ である．$d = f(D)$ とおく．$d \in D$ か $d \notin D$ のいずれかである．$d \in D$ とする．このとき D の定義より $d \notin f^{-1}(d)$．従って $d \notin D$ となり矛盾．一方 $d \notin D$ とする．このとき $d \notin f^{-1}(d)$．再び D の定義より $d \in D$ となりやはり矛盾．従っていずれを仮定しても矛盾が生じる．従って $A \not\sim \mathscr{P}(A)$．$A$ から $\mathscr{P}(A)$ への単射があることは自明なので $|A| \lneq |\mathscr{P}(A)|$. □

Corollary

全ての集合を含む集合は存在しない.

Proof. 背理法による．全ての集合を含む集合が存在するとする．それを U とする．U の任意の部分集合 M について $M \in U$ だから $\mathscr{P}(U) \subset U$. 従って $\mathscr{P}(U)$ から U への自明な単射が存在する．しかしこれはカントールの定理に反する. $\square$

集合論の苦難

- すべての集合の集合や，自分自身を含まない集合すべての集合などは，それが存在すると仮定すると矛盾が導かれる．
- 従ってこのような集合は存在しないと考えなければならない．
- しかし矛盾を生むかもしれない集合は他にも考えられるだろう．
- そのような集合が見つかるたびにそれを禁じるのはいかにもアド・ホックで望ましくない．

公理的集合論へ

- カントールの作った「素朴」な集合論に対する反省から，パラドクスを生み出すことがないような集合論の再構築の試みがなされた．
- そうして誕生したのが**公理的集合論**である．

可算基数と連続体基数

- 上では **N** と **R** の基数が異なることが示された.
- $|\mathbf{N}|$ は $\aleph_0$, $|\mathbf{R}|$ は $\aleph$ と表記される.
- $\aleph_0$ は**可算基数（可算濃度）**後者は**連続体基数（連続体濃度）**と呼ばれる.

連続体問題

- それでは $\aleph_0$ より大きく，$\aleph$ より小さいような基数は存在するだろうか？
- カントールはそのような基数は存在しないと予想したが，そのことを証明することは出来なかった．
- この予想は**連続体仮説**と呼ばれる．
- 1900 年に開かれた国際集学者会議においてヒルベルトは，数学者が取り組むべき 23 の問題を挙げたが，連続体問題の解決はその筆頭に挙げられていた．

公理的集合論と連続体仮説

- 現代では数学の基礎として公理的集合論 ZF が使われている.
- ゲーデルは公理的集合論 ZF から連続体仮説の否定が証明できないことを示した.
- 従って ZF が無矛盾ならば ZF に連続体仮説を付け加えても無矛盾である.
- コーエンは ZF から連続体仮説が証明できないことを示した.
- 従って ZF が無矛盾ならば ZF に連続体仮説の否定を付け加えても無矛盾である.