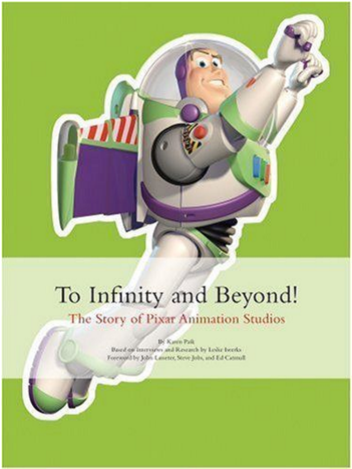
数学の哲学
7. 数学における無限

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

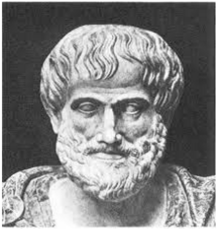
関西学院大学 2011 年度

無限とは何か？



無限を超えることはできるのか？

可能無限



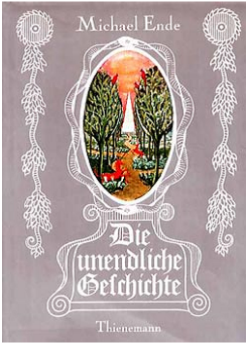
- アリストテレスは無限を「加算的」なものと「分割的」なものに分類した.
  - 加算的な無限とは，いくらでも増やしていけるものである.
  - 分割的な無限とは，いくらでも小さな部分に分けて行けるものである.
- アリストテレスにおいては無限とは決まった値ではなく，いくらでも続けられる過程のことである.

可能無限

- 自然数が無限に存在する
  → 任意の自然数 n に対して，それより大きな自然数が存在する．たとえば $n+1$
- 無限に小さい量が存在する
  → 任意の正の有理数 p に対して，p より小さな正の有理数が存在する．例えば $\frac{p}{2}$.

- 可能無限として無限を捉える時には，ある対象にある操作を加え，それ結果として得られた新しい対象に再び同じ操作を加えて，その結果として新しい対象を得る，という手続きの繰り返しとして捉えられる．

可能無限



エンデ『はてしない物語』には，世界の歴史すべてを記述する人物が登場する．彼は自分の書いている歴史の内容も記述しなければならず，かくして彼の書く歴史は「*Die unendliche Geschichte*」になる．

実無限

- 確定した対象として無限なるもの.
- すべての自然数の集合.
- 無限級数（無限回繰り返される足し算）の値．例えば円周率を 4 で割ったものは
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$
に等しいとされる.
- 無限遠点（幾何学で用いられる，平行線が交わる点）

収束

- 任意の n に対して S_n を
$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
として定義しよう.
- n をどんどん大きくしていくと S_n の値はどうなるだろう？

収束

- 任意の n に対して S_n を
$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
として定義しよう.
- n をどんどん大きくしていくと S_n の値はどうなるだろう？

- n を大きくすればするだけ S_n は 1 に近づく.
- このような時，数列 S_n は 1 に**収束する**という（正確な定義は後に述べる）.
- 数学ではしばしばある値に収束する数列を、その値と同一視する。

例：無理数

- **無理数**とは整数の比で表わすことが出来ない実数である.
- 例えば $\sqrt{2}$ は無理数である.
- なぜならばいかなる有理数 q を平方しても 2 にならないことが証明できるからである.
- しかし，それならば「平方して 2 になる数」とは一体どのような数なのか？
- そのような数があることをどうやって示すのか？

平方根の計算

- 任意の正整数 x に対して，$\sqrt{x}$ がどのようにして計算されるかを考えよう．
- $y = \sqrt{x}$ とすると $y = x/y$ である．
- 従って q と x/q の差が少ないほど q はより $\sqrt{x}$ に近い．
- そこで次のような有理数の数列 $\{q_n\}$ を考える．

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_{n+1} &= \frac{(q_n + \frac{x}{q_n})}{2} \end{aligned}$$

- このとき任意の n に対して $|q_{n+1} - \frac{x}{q_{n+1}}| < |q_n - \frac{x}{q_n}|$ が成り立つ．
- 従って q_n^2 は n が大きくなるにつれて限りなく x に近づいていく．

平方根の計算

- $\{q_n\}$ の各要素は有理数である．
- しかしそれらはどんな有理数とも異なる，一つ値に限りなく近づいている．
- そこで私たちはこのような数列がその値を指し示すと考えてもよいだろう．
- さらに一歩進んで，私たちはこのような数列がまさにその値そのものであると考えてはいけないだろうか？

実数の定義

- このような考えに基づいて実数を定義したのがコーシーやデデキントである．
- コーシーは有理数列 $\{a_n\}$ が収束するのは任意の自然数 $n > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，すべての自然数 $m > N$ に対して

$$|a_m - a_{m+1}| < \frac{1}{n}$$

  が成り立つことと定義した．
- また彼は二つの有理数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の間の同値関係 $\sim$ を次のように定義した：

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \forall n > 0 \exists N \forall m > N. |a_m - b_m| < \frac{1}{n}$$

- このように定義された同値関係 $\sim$ に基づいて，収束する有理数列全体の集合を同値分割することで実数を定義することができる．

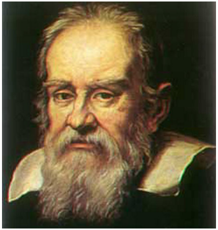
実数の定義

- デデキントはコーシーとは異なる方法で実数を定義した.
- 有理数すべての集合 $\mathbf{Q}$ に対して，次の性質を満たす $A, B \subseteq \mathbf{Q}$ の対 (A, B) を**切断**と呼ぶ：

$$A \cup B = \mathbf{Q}, \ \forall a \in A \forall b \in B. a \leq b$$

- デデキントは実数を，有理数上の切断として定義した.
- 例えば $\sqrt{2}$ は，$A = \{q \in Q : q^2 < 2\}$，$B = Q - A$ として，切断 (A, B) によって定義される.

実無限を否定する立場



Glileo Glilei

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\
1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 & \cdots
\end{array}
$$

- ガリレオは無限の存在を想定すると，部分と全体が等しいというパラドクスが生じる，と考えた.
- 彼はすべての自然数に対してその平方を一対一に対応させることができ，それ故に自然数と平方数は同じだけあると結論した.
- しかしこのことは「部分は全体よりも小さい」というユークリッド以来みとめられてきた真理に反する.

実無限を否定する立場

Gauss

- ガウスは，無限は有限を拡張したものにすぎないと考え，実無限を認めることをしなかった．

実無限を肯定する立場

- デデキントは，部分と全体とが一対一に対応づけられるという性質を積極的に利用し，そのような性質を持つことが無限であるための条件と捉えた.
- 今日ではこのような性質は**デデキント無限**と呼ばれる.

デデキントによる無限集合の存在証明

証明　私の思考の世界，すなわち私の思考の対象となり得るあらゆる事物の全体 S は無限である．なぜかというと，もし s が S の要素とすると，s が私の思考の対象であり得るという考え s' はそれ自身 S の一つの要素である．これを要素 s の像 $\phi(s)$ と見なせば，これによって確定する S の写像 ϕ は，その像 S' が S の部分集合であるという性質を有している．しかも S' は S の真部分集合である，というのは S のうちには，このようなどの考え s' ともことなり，したがって S' のうちには含まれないような要素（例えば，私本来の「我」）が存在しているからである．最後にもう一つ，a，b が S の相異なる要素ならば，その像 a'，b' は相異なることは明らかだから，したがって写像 ϕ は区別のつく（相似）写像である．よって S は無限である．証明終わり．
（デデキント「数とは何か，何であるべきか」）

カントールの無限論

- カントールは思考の対象として他のものと区別され明確な同一性を持つものは，確定した対象として扱ってよい，と主張した．
- 例えば私たちは何が自然数であり，何が自然数でないかという明確な基準を持っている．
- 従って自然数の集合は確定した対象である．

カントールの無限論

- 自然数の集合を N とする．
- N の基数 $|N|$ も，$\{A : N \sim A\}$ として明確に定義できるのだから，自然数の基数もまた確定した対象である．
- しかも $|N|$ はいかなる自然数よりも大きいことが証明できる．
- またカントールは無限集合の中にも大小の区別がつけられることを証明し，**超限数**の理論を創始した．