数学の哲学
5. 集合論による数の定義 (2)

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

集合の数

- 前回は二つの集合が等数であるという関係 $\sim$ を定義した.
- しかしまだ数そのものは定義されてない.
- ここでは等数関係から数を定義する方法を見る.

抽象による定義

- ある性質はその性質を持つ対象からなる集合を定義する．
- 逆にある集合はその集合に属する対象すべてが持ち，それ以外の対象は持たないようなある性質を定義しているともいえる．
- そこで等数的な集合すべてからなる集合をその集合の数として定義する．
- このような定義は**抽象による定義**と呼ばれる．

同値関係

- 集合 A 上の関係 $\equiv$ が次の三つの性質を持つとき $\equiv$ を A 上の**同値関係**という.
  - 反射性：$\forall x \in A. x \equiv x$
  - 対称性：$\forall x, y \in A. x \equiv y \Longrightarrow y \equiv x$
  - 推移性：$\forall x, y, z \in A. x \equiv y,\ y \equiv z \Longrightarrow x \equiv z$
- 抽象による定義は一般に同値関係を使って行われる.

同値関係

- 例
  - N 上の同一性 $=$ は同値関係である.
  - $N \times N$ 上の次の関係は同値関係である：

$$(x, y) \simeq (x', y') \overset{\text{def}}{\iff} x + y' = y + x'$$

  - 関数 $f : A \to B$ に対して,

$$a \simeq a' \overset{\text{def}}{\iff} f(a) = f(a')$$

    によって定められる関係は同値関係である.

同値関係

- $\equiv$ が A 上の同値関係であるとき,

$$\{b \in A : a \equiv b\}$$

によって定義される集合を a の $\equiv$ による**同値類**と呼び

$$[a]_{\equiv}$$

によって表す．明らかである場合添え字の $\equiv$ は省略される．また

$$\{[a]_{\equiv} : a \in A\}$$

によって定義される集合を A の $\equiv$ による**商集合**と呼び,

$$A/\equiv$$

によって表す.

同値関係

Lemma

$\equiv$ は A 上の同値関係とする．このとき以下が成り立つ．

1. $\forall a \in A \exists \alpha \in A/\equiv . a \in \alpha$
2. $\forall a, b \in A . a \equiv b \iff [a] = [b]$
3. $\forall \alpha, \beta \in A/\equiv . \alpha \neq \beta \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$

同値関係

Proof. (1) について．反射性より $a \equiv a$ だから $a \in [a] \in A/\equiv$.

(2) について．$a \equiv b$ とする．このとき任意の $c \in A$ に対して

$$\begin{aligned} c \in [a] &\iff a \equiv c \\ &\iff c \equiv a \ (symmetry) \\ &\implies c \equiv b \ (transitivity) \\ &\iff b \equiv c \ (symmetry) \\ &\iff c \in [b] \end{aligned}$$

よって $[a] \subseteq [b]$．$[b] \subseteq [a]$ も同様に示される．
逆に $[a] = [b]$ とする．(1) より $a \in [a]$ だから $a \in [b]$ よって $b \equiv a$．対称性より $a \equiv b$.

(3) について．対偶を示す．$\alpha, \beta \in A/\equiv$ とする．定義よりある $a, b \in A$ に対して $\alpha = [a]$ かつ $\beta = [b]$．$\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ とする．このときある $c \in A$ に対して $c \in \alpha \cap \beta$．よって $c \in \alpha$ かつ $c \in \beta$．定義より $a \equiv c$ かつ $b \equiv c$．対称性より $c \equiv b$．推移性より $a \equiv b$．よって (2) より $[a] = [b]$. $\square$

同値関係

Proposition

集合上の等数関係 $\sim$ は同値関係である．

Proof. 反射性，対称性については自明．推移性について．$A \sim B$ かつ $B \sim C$ とする．このとき全単射 $f : A \to B$，$g : B \to C$ が存在する．このとき $g \circ f : A \to C$ は全単射であることを示そう．$g \circ f(c) = g \circ f(c')$ としよう．すなわち $g(f(c)) = g(f(c'))$．g は単射だから $f(c) = f(c')$．f は単射だから $c = c'$．よって $g \circ f$ は単射．
任意の $c \in C$ を考える．g が全射なので，ある $b \in B$ が存在して $g(b) = c$．f が全射なので，ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$．よって $g(f(a)) = c$．よって $g \circ f(a) = c$．従って $g \circ f$ は全射． $\square$

集合の基数

- 任意の集合 A に対して $|A|$ は A の $\sim$ による同値類であるとする．この $|A|$ を A の**基数**と呼ぶ．
- $\sim$ が同値関係であることから，すべての集合がただ一つの基数を持つこと，任意の集合 A と B に対して

$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

が成り立つことなどが分かる．

順序

- 集合 A に対して次の三つの条件を満たす A 上の関係 R を**順序**と呼ぶ
  - 反射性：$\forall x \in A. xRx$
  - 推移性：$\forall x, y, z \in A. xRy,\ yRz \Longrightarrow xRz$
  - 反対称性：$\forall x, y \in A. xRy,\ yRx \Longrightarrow x = y$

基数の大小

- 集合の基数の間に次のように関係 $\leq$ を定義する

$$|A| \leq |B| \iff \exists X \subseteq B.A \sim X$$

- 後に示すように，この関係は基数上の順序である．

基数の大小

Lemma

$|A| \leq |B| \iff$ A から B への単射が存在する．

Proof. $|A| \leq |B|$ とする．このときある $X \subseteq B$ に対して $A \sim X$．ゆえにある全単射 $f : A \to X$ が存在する．$f' : A \to B$ はすべての $x \in A$ に対して $f'(x) = f(x)$ となるような A から B への関数とする．このとき明らかに f' は単射である．
反対に A から B への単射が存在するとする．それを f と呼ぶ．$X \subseteq B$ を $\{x : \exists y \in A.x = f(y)\}$ として定義する．また $f' : A \to X$ を，すべての $x \in A$ に対して $f'(x) = f(x)$ となる A から X への関数として定義する．このとき明らかに f' は全単射．よって $A \sim X$．よって $|A| \leq |B|$． □

カントール＝ベルンシュタインの定理

Theorem

$|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ ならば $|A| = |C|$

Proof. 省略する．例えば松坂和夫『集合位相入門』を参照せよ． □

基数の大小

- 上の定義が，二つの基数 $|A|$ と $|B|$ について，それぞれから一つの要素 $A \in |A|$ と $B \in |B|$ を選び，それらの間の $\exists X \subseteq B.A \sim X$ という関係によって定義されていることに注意しよう．
- 仮に $|A| = |C|$ であるが $\neg\exists X \subseteq B.C \sim X$ となる C が存在すると，$|A| \leq |B|$ かつ $|C| \not\leq |B|$ となる．しかし $|A| = |C|$ だからこれは矛盾である．
- 従って $\leq$ が矛盾のなく定義されていることを示すには，このような C が存在しないことを示さなければならない．

基数の大小

Proposition

任意の集合 A, B, C, D に対して，$A \sim C$, $B \sim D$ かつ $\exists X \subseteq B.A \sim X$ ならば $\exists X \subseteq D.C \sim X$.

Proof. $A \sim C$, $B \sim D$, $X \subseteq B$ かつ $A \sim X$ と仮定する．$X \subseteq B$．$B \sim D$ より B から D への全単射が存在する．これを $f : B \to D$ とする．$Y \supseteq D$ を $\{x : \exists y \in B.f(y) = x\}$ と定義する．また $g : X \to Y$ を任意の $x \in X$ に対して $g(x) = f(x)$ として定義する．このとき明らかに g は X から Y への全単射である．従って $X \sim Y$．いま $A \sim X$, $A \sim C$ だから $C \sim Y$．よって $\exists X \subseteq D.C \sim X$. □

基数の大小

Proposition

上で定義された $\leq$ は順序である．

Proof. $A \sim A \subseteq A$ より $|A| \leq |A|$．よって反射性は成り立つ．
推移性について．$|A| \leq |B| \leq |C|$ とする．このとき上の補題より単射 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が存在する．このとき $g \circ f : A \to C$ もまた単射である．よって再び補題より $|A| \leq |C|$.
反対称性はカントール＝ベルンシュタインの定理による． $\square$