数学の哲学
2. 数学の基礎づけ

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

解析の厳密化

Augustin-Louis Cauchy　Karl Weierstraß

- 近代までの解析においては無限や連続などの概念には曖昧なところがあり，数学者の間でそれらをどのように扱うかという点で明確な合意がなかった．
- 19 世紀になってフランスのコーシーやドイツのワイアーシュトラースが解析の厳密化を行った．
- 彼らによって実数の概念は有理数によって正確に定義できることが示された．

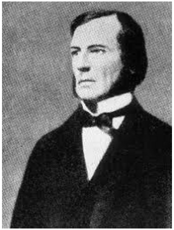
数学の基礎の整備

Richard Dedekind

Giuseppe Peano

- ただしその際に彼らが用いていた集合論，自然数論については明確な定式化がなされていなかった．
- 19 世紀後半，ドイツのデデキントによって集合論，イタリアのペアノによって自然数論の定式化が試みられた．

現代論理学の誕生



George Boole

Augustus De Morgan

- 同じ頃，イギリスのブール，ド・モルガンなどによって論理学を数学的に扱う取り組みが創始された．
- またフレーゲによって数学的証明の道具としての記号論理学が定式化された．

還元主義的プログラム

- デデキント，カントールは集合論を用いて自然数を定義できることを示した．
- また同じ頃，フレーゲは数や集合などの数学に固有の概念を使用せずに，論理学の概念のみから自然数が定義できることを示した．
- これによって数学は集合論あるいは論理学に還元できるということが確立されたかに思われた．
- 集合論や論理学で扱われる概念は明確であり，かつそれらの基づいている原理は確実であるように思われるため，集合論あるいは論理学への還元は数学に確実な基礎を与えるように思われる．
- このように，ある概念とそれについての真理を，別のより自明かつ確実な概念とそれについての真理に還元することによって，前者の概念を明らかにしたりそれについての真理を確立したりする試みを「還元主義的プログラム」と呼ぼう．

還元主義的プログラム

- ある概念 A は別な概念 B によって置き換えることが出来るという主張を還元主義という.
- 例えば心の哲学における還元主義とは，心的現象はすべて物理的現象によって説明でき，従って心は物に還元できる，という主張である.
- デデキントやカントールは数論は集合論に還元できると主張し，一方でフレーゲやラッセルは数論は論理学に還元できると主張した.
- しかし数論を集合論に還元するというのは具体的にはどういうことだろう？
- そのために集合論について知らなければならない.
- ここではより分かりやすい例を用いてある概念を別な概念に還元するというのがどういうことかを見てみよう.

例：自然数の掛け算を自然数の足し算に還元する

- 自然数の集合 $\mathbb{N}$ についてはしられているものとする．また任意の自然数 x，y に対して $x+y$ の計算は出来るものとする．任意の自然数 x についてその次の自然数 $s(x)$ を求めることが出来，また $s(x)$ から x を求めることが出来るものとする．
- このとき自然数上の掛け算 $\times$ は次のように定義できる：

$$
\begin{aligned}
x \times 0 &= 0 \\
x \times s(y) &= (x \times y) + x
\end{aligned}
$$

例：自然数の掛け算を自然数の足し算に還元する

- この定義に従うと，例えば $x \times 4$ は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
x \times 4 &= (x \times 3) + x \\
&= (x \times 2) + x + x \\
&= (x \times 1) + x + x + x \\
&= (x \times 0) + x + x + x + x \\
&= 0 + x + x + x + x
\end{aligned}
$$

例：整数を自然数に還元する

- 自然数 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ と自然数上の足し算 $+$，および自然数同士の同一性 $=$ は理解されているものとする．
- 整数は自然数に負の数を加えたものである．
- しかし負の数とは何だろう？
- 負の数とは足し算の逆演算としての引き算によって要請される数である．
- 自然数上の引き算は次のように定義される．

$$\begin{aligned} x - 0 &= x \\ 0 - y &= 0 \\ (x+1) - (y+1) &= x - y \end{aligned}$$

例：整数を自然数に還元する

- 自然数上の引き算では $x \leq y$ ならば $x - y$ の値はすべて 0 になる.
- 従って $(x - y) + y = x$ が必ずしも成り立たない.
- つまり足し算と引き算が逆演算になっていない.
- そこで足し算と引き算が逆演算になるような $x - y$ の値が欲しい.
- 問題は $x \leq y$ の場合に $x - y$ という演算によって y の情報が失われることである.

例：整数を自然数に還元する

- そこで任意の二つの自然数 x, y について，その差を順序対 (x, y) によって表すことにする．
- これは自然数の集合 $\mathbb{N}$ のそれ自身による直積 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の要素である．
- 次に順序対の間の 2 項演算 $\oplus$ と $\ominus$ を次のように定義する．

$$(x, y) \oplus (x', y') \stackrel{def}{=} (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \ominus (x', y') \stackrel{def}{=} (x + y', x' + y)$$

- 定義の右辺に現れる $+$ は自然数上の足し算．

例：整数を自然数に還元する

- また自然数の順序対同士の関係 $\simeq$ を次のように定義する．

$$(x, y) \simeq (x', y') \overset{def}{\iff} x + y' = x' + y$$

- 定義の右辺に現れる $+$，$=$ は自然数上の足し算と同一性である．
- このように定義したとき，$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$，$\oplus$，$\ominus$，$\simeq$ を整数の集合，整数の足し算，整数の引き算，整数同士の同一性とほぼ同一視できる．

還元主義の挫折

- 通常ある概念 A が別の概念 B に還元されるというとき，B の方が私たちにとってより明らかである，ということが前提となっている．
- カントールやフレーゲが数論が集合論に，あるいは論理に還元できるという時，彼らは数論よりも集合論や論理学の方が直観的により明らかであると考えていた．
- それゆえにまた集合論や論理学における真理の方がより確実であると考えていた．
- しかしラッセルによってカントールの集合論，およびフレーゲの論理学には矛盾が含まれることが発見され，数論をより自明で確実な集合論や論理学に還元し，そのことによって数学を基礎づけるという目的は果たせなくなった．