数学の哲学
4. 集合論による数の定義 (1)

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

基本的なアイディア

- 数とは集合の持つ特徴の一つである.
- 集合がどれだけの要素を持つかによって集合の数は決定される.
- 数には大小関係が付けられる.
- 多くの要素を持つ集合ほど大きな数を持つ.

集合の大小

- 集合 A が集合 B より多くの要素を持つとき，A は B より大きいと言う．またこのとき B は A より小さいという．
- また集合 A と集合 B が同じだけ多くの要素を持つとき，A は B と同じサイズであると言う．
- しかしある集合が別の集合より大きい，あるいは同じサイズであるというのは正確に言ってどういうことだろうか？

集合の大小

- Q：日本に都道府県と都道府県知事とではどちらが多いか？

集合の大小

- Q：日本に都道府県と都道府県知事とではどちらが多いか？
- A：同じ．すべての都道府県に対して，一人の知事がいるし，知事は複数の都道府県の知事にはなっていないから．

集合の大小

- Q：日本に都道府県と市町村とではどちらが多いか？

集合の大小

- Q：日本に都道府県と市町村とではどちらが多いか？
- A：市町村．すべての都道府県に対して一つより多い市町村があるから．

集合の大小

- 上の例で分かるように，実際に要素の数を数えなくても二つの集合の大小は判定できる．
- 集合 A の要素に対して，集合 B の要素が重複も余りもなく対応付けられるとき，A と B は**一対一に対応付けられる**という．
- 集合 A が集合 B と一対一に対応付けられるとき，A と B は同じサイズである．
- 集合 A が集合 B の真部分集合に一対一に対応付けられるとき，A は B 以下のサイズである．
- 無限集合に関しては要素の全てを列挙することができないので，一対一に対応付けられるかどうかが集合の大小を決定するための基準になる．

一対一対応

- 一対一対応とは正確に言えばどのようなものか？
- これを説明するためには，集合論におけるいくつかの概念を説明しておかなければならない．

関係

- 集合 A と集合 B の間の**関係**とは A の要素のあるものと B の要素のあるもの（複数でもよい）を対応付けるものである．
- J を日本人の集合，P を日本の都道府県の集合とする．
- 例えば「x は y の知事である」は，どこかの都道府県県の知事である日本人に対して，その人が知事になっている都道府県を対応付ける関係である．
- R は集合 A と B の間の関係であるとする．R が $a \in A$ を $b \in B$ に対応付けている時，このことを aRb によって表す．

関係

- 問題
  - 関係の例を考えよ.

関係

- 問題
  - 関係の例を考えよ.
- 解答例
  - H を人間の集合とする.「x は y の親である」は H と H の間の関係. このような関係は H 上の関係とも言われる.
  - H を人間の集合とする. S を文字列の集合とする.「x は y という名前を持つ」は H と S の間の関係.
  - N を自然数の集合とする.「$x \leq y$」は N と N の間の関係.

関係と直積

- 関係のもう一つの捉え方は次のようなものである．
- 対象 a と b からなる**順序対**とは集合 $\{a, \{a, b\}\}$ のことである．通常これは (a, b) と表される．
- 集合 A と集合 B に対して A と B の**直積**とは，A と B の要素からなる順序対すべての集合である．A と B の直積を $A \times B$ によって表す．

関係と直積

- 例えば $A = \{a, b\}$，$B = \{0, 1, 2\}$ とすると

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$$

- A と B の間の関係 R は $A \times B$ の部分集合と考えることができる.

$$aRb \iff (a, b) \in R$$

関数

- 集合 A と集合 B の間の関係 f が**関数**であるのは f が次の二つの条件を満たす時である.
  1. $\forall a \in A \exists b \in B.(a, b) \in f$
  2. $\forall a \in A \forall b, b' \in B.(a, b) \in f \& (a, b') \in f \Rightarrow b = b'$
- つまり任意の A の要素に対してただ一つの B の要素が f によって対応させられる, ということである.
- $(x, y) \in f$ であるとき, $f(x)$ によって y を指す. すなわち

$$(x, y) \in f \iff f(x) = y$$

関数

- A から B への関数 f に対して，A を f の**始領域**，B を f の**終領域**と呼ぶ．
- f が A から B への関数であることを示すために

$$f : A \to B$$

と書く．

関数

- A から B への関数 f を定義するには A の各要素 a に対して $f(a)$ が B のどの要素になるかを指定すれば良い.
- 例えば任意の $x \in N$ に対して
$$f(x) = x + 1$$
は N から N への関数を定義している.
- しかし
$$f(x) = x - 1$$
は N から N への関数を定義しない（なぜか？）.

関数

- 例
  - H を人間の集合，N を自然数の集合とすると「x は満 y 歳である」は H から N への関数.
  - 「$x + 1 = y$」は N から N 自身への関数.

関数

- 問題：関数の例を考えなさい.

関数の同一性

- 二つの関数 $f : A \to B$ と $g : C \to D$ が同一であるのは，$A = C$, $B = D$ であり，かつすべての $x \in A$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つときである．
- 始領域同士，終領域同士が一致しなければ同一の関数にならないことに注意せよ．

関数の合成

- 関数 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して
$$h(a) = g(f(a)) \quad (a \in A)$$
によって定義される $h : A \to C$ を f と g の**合成**と言い，$g \circ f$ によって表す.

恒等射，埋め込み

- $A \subseteq B$ とする．関数 $f : A \to B$ が A の B への**埋め込み**であるのはすべての $a \in A$ に対して $f(a) = a$ が成り立つときである．
- 関数 $f : A \to A$ が A の A への埋め込みであるとき，f は A 上の**恒等射**と呼ばれる．A 上の恒等射を id_A と書く．

単射

- 関数 $f : A \to B$ が**単射**であるのは f が A の各要素に対して，B の要素を重複なく対応づけるとき，つまり

$$\forall x, x' \in A. f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成り立つときである．これは

$$\forall x, x' \in A. x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

が成り立つことに等しい．

単射

- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ とする．このとき A から B への単射の例を挙げよ．
- B から A への単射が存在しないことを確かめよ．

全射

- 関数 $f : A \to B$ が**全射**であるのは，f が B のすべての要素に対して，A の何らかの要素を対応づけるとき，すなわち

$$\forall y \in B \exists x \in A. f(x) = y$$

が成り立つときである．

全射

- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ とする．このとき A から B への全射の例を挙げよ．
- B から A への全射が存在しないことを確かめよ．

全単射

- 関数 $f : A \to B$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**と呼ばれる．
- $f : A \to B$ が全単射であるとき，A の要素と B の要素は f によって余りも重複もなく対応づけられる．そのため全単射は**一対一対応**とも呼ばれる．

全単射

Fact

関数 $f : A \to B$ が全単射であるのは、ある関数 $g : B \to A$ が存在して,

$$g \circ f = id_A, \quad f \circ g = id_B$$

が成り立つことと等しい.

- このような g を f の**逆関数**と呼ぶ.

全単射

- 問題：任意の全単射 $f : A \to B$ に対して，その逆関数は一意であることを示せ.

等数性

- 集合 A と集合 B が**等数**であるのは，A から B への全単射が存在するときである．
- 集合 A と B が等数的であることを

$$A \sim B$$

によって表す．