数学の哲学
6. 集合論による数の定義 (3)

久木田水生
minao.kukita@gmail.com

京都大学

関西学院大学 2011 年度

自然数

- 前回までで，等数な集合の同値類によって集合の基数の定義を与え，集合の基数が順序を形成することを確認した．
- ここでは集合の基数が自然数と見なしうる構造を有していることを見る．

Definition

- $\leq$ が集合 A 上の順序であるとき，$\langle A, \leq \rangle$ を**順序集合**と呼ぶ．$\leq$ が理解されているときには単に A と書いて $\langle A, \leq \rangle$ を意味することもある．
- 順序集合 $\langle A, \leq \rangle$ に対して，$x \in A$ がすべての $y \in A$ に対して $x \leq y$ を満たす時，x は順序集合 A の**最小元**であるという．
- 順序集合 $\langle A, \leq \rangle$ と $x \in A$ に対して，$y \in A$ が x **の直後**の要素であるのは次に条件が成り立つときである．
    - $x \leq y \& x \neq y$
    - 任意の $z \in A$ に対して $x \leq z \leq y$ ならば $z = x$ または $z = y$

自然数の順序の構造

- 自然数のなす順序の構造は以下の性質によって特徴づけられる.
  1. 最小の要素がある
  2. どの要素にもその直後の要素がただ一つだけ存在する.

基数の順序構造

- 集合の基数全体は自然数の全体よりも大きい.
- しかし集合の基数が持つ順次構造は，自然数の持つ順序構造を含んでいる.
- 以下で，このことを見ていこう.

Definition

次のように定義される集合族 $\{F_0, F_1, \ldots\}$ を F **系列**と呼ぶ.

1. $F_0 = \varnothing$
2. $F_{n+1} = F_n \cup \{F_n\}$

以下において $|F_n|$ を c_n と表記する.

Lemma

$x \in F_n \iff$ ある $m < n$ に対して $x = F_m$.

Proof. n に対する帰納法による． $n = 0$ の時は自明.
$n = k + 1$ のとき.「$x \in F_k \iff$ ある $m < k$ に対して $x = F_m$」が成り立っているものとする（帰納法の仮定）． $F_n = F_k \cup \{F_k\}$ である． よって

$$\begin{aligned} x \in F_n &\iff x \in F_k \vee x = F_k \\ &\iff (\exists m < k.x = F_m) \vee x = F_k \\ &\iff \exists m < k+1.x = F_m \\ &\iff \exists m < n.x = F_m \end{aligned}$$

□

ここから $F_n = \{F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}\}$ と分かる.

Corollary

$m \leq n$ ならば $F_m \subseteq F_n$.

Lemma

任意の $m < n$ に対して $F_m \neq F_n$

Proof. n に対する帰納法による．$n = 0$ のときは自明.
$n = k + 1$ のとき．任意の $m < k$ に対して $F_m \neq F_k$ とする（帰納法の仮定）．$m \leq k$ とする．このとき上の補題より $F_k \notin F_m$ である．一方 $F_k \in F_k \cup \{F_k\} = F_n$．従って $F_m \neq F_n$. □

Corollary

任意の $m, n \in N$ に対して次の三つの条件は同値：

- $m < n$
- $F_m \in F_n$
- $F_m \subsetneq F_n$

Lemma

1. $c_n \leq c_{n+1}$,
2. $c_n \neq c_{n+1}$.

Proof. 1 については $F_n \subseteq F_{n+1}$ より自明.
2 については n に対する帰納法で示す． $n = 0$ の時は自明.
$n = k + 1$ の時． $c_k \neq c_{k+1}$ と仮定する（帰納法の仮定）． $c_n \neq c_{n+1}$ を背理法で示す． $c_n = c_{n+1}$ と仮定する． このとき F_{n+1} から F_n への全単射が存在する． これを $f : F_{n+1} \to F_n$ とする． $F_n \subset F_{n+1}$ なので，次のように全単射 $f' : F_n \to f[F_n]$ が定義できる：$f'(F_i) = f(F_i)$（$0 \leq i < n$）． f は単射なので $f(F_n) \notin f[F_n]$． $f(F_n) = F_i$ とする（$0 \leq i < n$）． ここで F_k から $f[F_n]$ への関数 g を次のように定義する：$0 \leq j \leq i$ のとき，$g(F_j) = F_j$， $i \leq j < k$ のとき，$g(F_j) = g(F_{j+1})$． このとき明らかに g は全単射である． 従って $F_k \simeq f[F_n] \simeq F_n = F_{k+1}$ が帰結する． しかしこれは仮定に反する． よって $c_n \neq c_{n+1}$. □

Lemma

$c_n \leq |A| \leq c_{n+1}$ ならば $|A| = c_n$ または $|A| = c_n$.

Proof. $c_n \leq |A| \leq c_{n+1}$ とする．このとき F_n から A への単射 f が存在する．$c \neq |A|$ とする．このとき少なくとも一つの $a \in A$ に対して $a \notin f[F_n]$．ここで $g : F_{n+1} \to A$ を以下のように定義する：

$$g(F_i) = \begin{cases} f(F_i) & (0 \leq i < n \text{ の時}) \\ a & (i = n \text{ の時}) \end{cases}$$

f が単射であり，$a \notin f[F_n]$ だから，明らかに g は単射である．従って $c_{n+1} \leq |A|$．仮定より $|A| \leq c_{n+1}$ だから $\leq$ の反対称性より $|A| = c_{n+1}$．□

上記の二つの補題より次が導かれる.

Proposition

c_{n+1} は c_n の直後の要素である.

Proposition

$|A|$ が c_n の直後の要素ならば $|A| = c_{n+1}$.

Proof. $|A|$ が c_n の直後の要素であるとする．このとき F_n から A への単射 f が存在する．$c_n \neq |A|$ より f は全射ではない．よってある $a \in A$ に対して $a \notin f[F_n]$. いま $b \notin f[F_n]$ かつ $a \neq b$ であるような $b \in A$ が存在するとする．このとき明らかに $c_n < |A - \{b\}| < |A|$. これは $|A|$ が c_n の直後の要素であることに反する．よって上のような b は存在しない．よって
$c_n = |A - \{a\}|$. 一方 $c_n = |F_{n+1} - \{F_n\}|$. よって
$|A - \{a\}| = |F_{n+1} - \{F_n\}|$. よって $|A| = |F_{n+1}| = c_{n+1}$. □

Proposition

c_0 は最小の基数である.

Proof. 任意の集合 A に対して，$F_0 = \varnothing$ からの関数が一つだけ存在する．それを $f : F_0 \to A$ とする．このとき f は単射である．というのも $\varnothing$ は要素を持たないので，単射の条件

$$\forall x \forall y (x \in \varnothing \& y \in \varnothing \& x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

が空虚に成り立つからである．従って $|F_0| \leq |A|$．よって c_0 は最小の基数. $\square$

- 以上から，基数の順序集合 $\langle \{c_n : n \in N\}, \leq \rangle$ が自然数と同型の構造を持つことが分かった．